September 21–26, 2014, Herceg Novi, Montenegro
12th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project
The Future of Mathematics Education in a Connected World

Le questioni della generalizzazione nei primi anni di scuola: l'importanza della teoria dell'educazione matematica per docenti e studenti

Nicolina A. Malara, Giancarlo Navarra
University of Modena and Reggio Emilia, Italy

L' approccio socio-costruttivista

Nell'insegnamento sociocostruttivista gli insegnanti di matematica hanno la responsabilità di:

- Creare un ambiente che permetta agli alunni di costruire l'apprendimento della matematica;
- Formulare ipotesi sui costrutti concettuail degli studenti e *sulle possibili strategie didattiche da attuare* al fine di poter modificare tali costrutti.

Questo implica che gli insegnanti non devono accontentarsi di acquisire la <u>conoscenza dei contenuti pedagogici</u> ma anche la *conoscenza degli stili interattivi e discorsivi di insegnamento.*

I bisogni degli insegnanti

In una prospettiva costruttivista gli insegnanti hanno bisogno di:

- vedersi offrire delle opportunità tramite lo studio individuale e appropriate attività sperimentali;
- rivedere conoscenze e convinzioni sulla disciplina e sul suo insegnamento per superare possibili stereotipi e misconcezioni;
- diventare consapevoli che il loro compito principale è quello di rendere gli studenti capaci di dare senso e sostanza alla loro esperienza e di costruire una conoscenza significativa collegando le nuove situazioni con concetti già acquisiti.

Lo stato dell'arte

Le attuali risposte a questi bisogni sono molto complesse nel caso di tematiche classiche come l'*aritmetica* e *l'algebra* che portano il peso di essere discipline antiche, il cui insegnamento è condizionato dal loro sviluppo storico.

Nell'insegnamento-apprendimento tradizionale dell'algebra è generalmente privilegiato lo studio delle regole come se la manipolazione formale potesse precedere la comprensione dei significati.

La tendenza generale è di insegnare la sintassi dell'algebra trascurando la sua semantica.

La nostra ipotesi sull'approccio all'algebra

Riteniamo che la struttura mentale del pensiero algebrico possa essere costruita sin dai primi anni della scuola primaria, quando gli alunni hanno il primo approccio con l'aritmetica, insegnando loro a pensare all'aritmetica in una prospettiva algebrica.

In altre parole costruendo il loro pensiero algebrico progressivamente, come strumento di pensiero, lavorando in parallelo con l'aritmetica. Questo significa iniziare dai suoi significati attraverso la costruzione di condizioni che stimolino a livello informale lo sviluppo autonomo di quello che chiamiamo **balbettio algebrico**.

Balbettio algebrico

Il balbettio algebrico può essere visto come il controllo sperimentale e continuamente ridefinito di un nuovo linguaggio in cui le regole trovino il loro posto gradualmente all'interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente *promiscui* che stimoli una consapevole e sensibilità verso gli aspetti formali del linguaggio matematico.

La metafora del balbettio

Mentre apprende una lingua il bambino si appropria gradualmente dei significati e delle regole, sviluppandoli attraverso imitazioni e aggiustamenti fino all'età scolare, quando imparerà a leggere e a riflettere sugli aspetti morfologici e sintattici del linguaggio.

Crediamo che un processo simile possa essere seguito anche quando gli allievi si avvicinano al linguaggio algebrico, perché esso permetterebbe loro di comprendere il significato e il valore del linguaggio formale e le radici degli oggetti algebrici.

→ Un esempio di balbettio algebrico

Un esempio di balbettio algebrico (10 anni)

Gli alunni hanno tradotto algebricamente la frase:

"Il numero dei biscotti alla vaniglia è uno in più del doppio del numero dei biscotti al cioccolato."

- **1×2**
- **a+1×2** **(a = numero dei biscotti alla vaniglia)**
- **bv+1×2**
- **a×2+1**
- **bv+1×2=a**
- **bv=bc+1×2**
- **a=b×2+1**
- **a×2+1=b** **(a = numero dei biscotti al cioccolato)**
- **(a–1)×2**

Proviamo a riflettere sulle frasi scritte dagli studenti

Un esempio di balbettio algebrico (10 anni)

Gli alunni hanno tradotto algebricamente la frase:
"Il numero dei biscotti alla vaniglia è uno in più del doppio del numero dei biscotti al cioccolato."

- **1×2**
- **a+1×2** **(a = numero dei biscotti alla vaniglia)**
- **bv+1×2**
- **a×2+1**
- **bv+1×2=a**
- **bv=bc+1×2**
- **a=b×2+1**

Gli alunni vengono stimolati a discutere sulla correttezza delle parafrasi che esprimono in modi diversi la stessa frase.

Esempio – COMPORTAMENTO ABITUALE

È raro che un'insegnante dedichi un'attenzione significativa agli aspetti linguistici del linguaggio della matematica sia per gli aspetti semantici che per quelli sintattici.
Solitamente non favorisce la riflessione degli studenti sull'interpretazione delle formule, come oggetti linguistici in sé e come rappresentazioni che oggettivano processi di risoluzione di situazioni problematiche.

L'insegnante non promuove gli aspetti metacognitivi e metalinguistici nell'insegnamento della matematica.

Esempio – UNA PROSPETTIVA PREALGEBRICA

L'insegnante dovrebbe:

- Interpretare la scrittura di ogni alunno e capire le idee che essa sottende,
- fare in modo che gli studenti interpretino le scritture e valutino la loro efficacia riflettendo sulla loro correttezza e sull'appropriatezza rispetto alla frase iniziale,
- discutere sull'equivalenza o sulla differenza tra le scritture e far selezionare quelle appropriate.

Esempio – UNA PROSPETTIVA PREALGEBRICA

L'insegnante dovrebbe essere capace di:

- agire come partecipante-osservatore, in altre parole tenere le proprie decisioni sotto controllo durante la discussione, cercando di essere neutrale e proponendo ipotesi, percorsi di ragionamenti e deduzioni prodotte sia individualmente che da piccoli gruppi;
- prevedere le reazioni degli alunni alle situazioni proposte e cogliere interventi significativi , anche imprevisti, per aprire nuove prospettive nello sviluppo dell'attività.

Sono competenze non facili da raggiungere

Le nostre convinzioni

I nostri studi ci rendono consapevoli delle difficoltà che gli insegnanti incontrano nella progettazione e nella gestione delle discussioni di classe. Essi evidenziano come, nello sviluppo delle discussioni, gli insegnanti:

- non fanno in modo che gli alunni si facciano carico delle conclusioni da raggiungere,
- tendono a ratificare la validità degli interventi produttivi senza coinvolgere gli alunni.

Riteniamo che sia necessaria un'attenta analisi dei processi di classe se si vuole condurre un insegnante a stabilire una gestione produttiva con gli studenti.

1998 - 2014

Il progetto promuove

- una revisione dell'insegnamento dell'aritmetica in senso relazionale,
- un uso precoce delle lettere per generalizzare e codificare relazioni e proprietà,
- un rimodellamento della professionalità degli insegnanti (conoscenze, credenze, comportamenti, atteggiamenti, consapevolezza) attraverso processi di condivisione di questioni teoriche legate alla pratica.

Metodologia

Lo sviluppo del progetto si basa su una rete di relazioni che coinvolgono:

- i ricercatori universitari come educatori di matematica
- gli insegnanti-ricercatori come tutor
- gli insegnanti
- gli alunni.

Il ciclo dell'educazione matematica degli insegnanti

influenza

Attività di classe

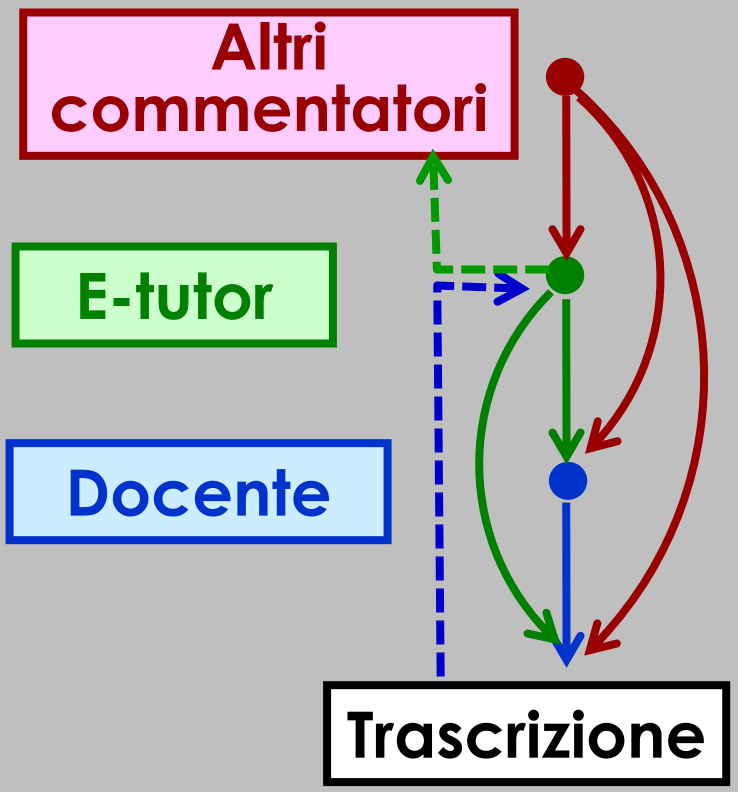
conduce a

Sviluppo di quadro teorico, metodologie, materiali

Reflessioni congiunte fra insegnanti, tutors, Educatori di matematica

conduce a

La Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate



Un insegnante

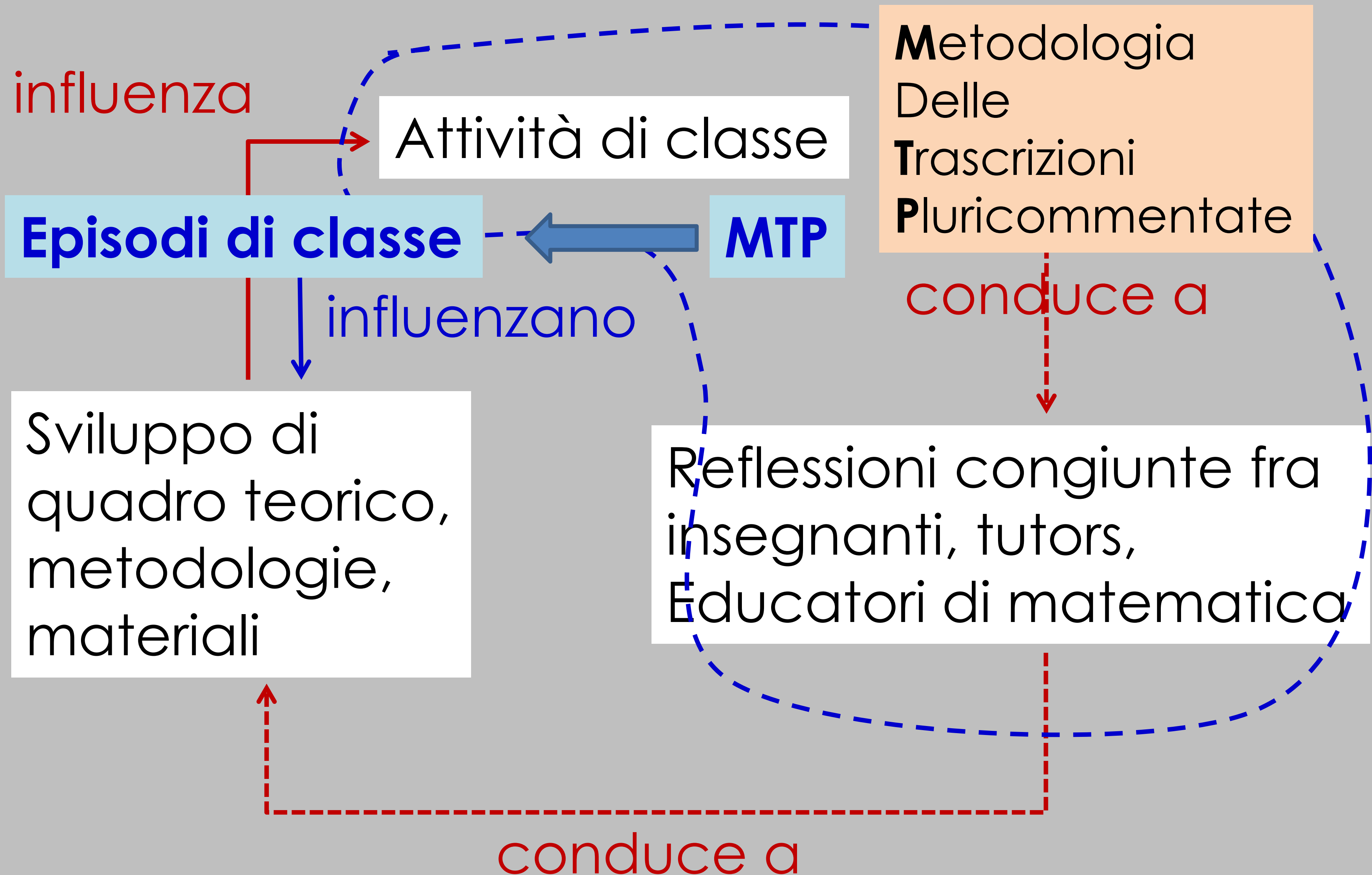
- registra una lezione,
- invia la sua Trascrizione Commentata (TC) all'E-tutor.

L'E-Tutor

- commenta la TC,
- invia la nuova versione agli **altri membri** del team che aggiungono i loro commenti.

La TC diventa un potente strumento di riflessione e di apprendimento per gli insegnanti.

Il ciclo dell'educazione matematica degli insegnanti



Gli episodi di classe

Mostriamo ora una serie di episodi di classe che testimoniano:

- gli effetti del lavoro congiunto tra docenti, tutor e docenti di matematica che fanno sì che gli insegnanti facciano propri i risultati teorici impostando una nuova pratica d'aula;
- la realizzazione di nuove convinzioni, di un nuovo linguaggio e di nuovi modi di agire in aula;
- le concettualizzazioni degli alunni e l'attitudine verso una visione relazionale e pre-algebrica dell'aritmetica.

Esempio 1 (8 anni)

Gli alunni stanno riflettendo su:

5+6=11 11=5+6

Piero osserva:
"E' giusto dire che 5 più 6 fa 11 ma non si può dire che 11 'fa' 5 più 6, quindi è meglio dire che 5 più 6 'è uguale a' 11 perché in questo caso è vero anche il contrario".

Cosa potete dire della frase di Piero?

Esempio 1 (8 anni)

Gli alunni stanno riflettendo su:

$$5+6=11 \qquad\qquad 11=5+6$$

Piero osserva:
"E' giusto dire che 5 più 6 fa 11 ma non si può dire che 11 'fa' 5 più 6, quindi è meglio dire che 5 più 6 'è uguale a' 11 perché in questo caso è vero anche il contrario".

Piero sta discutendo il ***significato relazionale*** *del segno* *uguale*.

Esempi 1 (8 anni) – COMPORTAMENTO CONSUETO

Insegnanti e alunni 'vedono' le operazioni a sinistra del segno '=' e un risultato alla sua destra. In questa prospettiva il segno 'uguale' esprime il significato **procedurale** di 'operatore direzionale' e ha una connotazione prevalentemente spazio-temporale. (sinistra-destra, prima-dopo).
La consegna "Scrivi 14 più 23" spesso ottiene la risposta '14+23=' in cui ' = ' è considerato un **necessario** 'segnale di conclusione' ed esprime la convinzione che una conclusione, prima o poi, viene richiesta dal docente. '14+23 'è vista come incompleta. Gli alunni soffrono qui per un controllo dei significati povero o assente.

Esempio 1 (8 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Quando si passa all'algebra, questo segno acquista un significato relazionale diverso, poiché indica l'uguaglianza tra due rappresentazioni della stessa quantità.

Piero sta imparando a muoversi in un universo concettuale in cui sta andando al di là della familiare connotazione spazio-temporale. Per fare questo, gli alunni devono 'vedere' i numeri ai due lati del segno 'uguale' in un modo diverso; il concetto di rappresentazione di un numero diventa cruciale.

Esempio 2A (9 anni)

Miriam rappresenta il numero di dolci: $(3+4)\times6$.

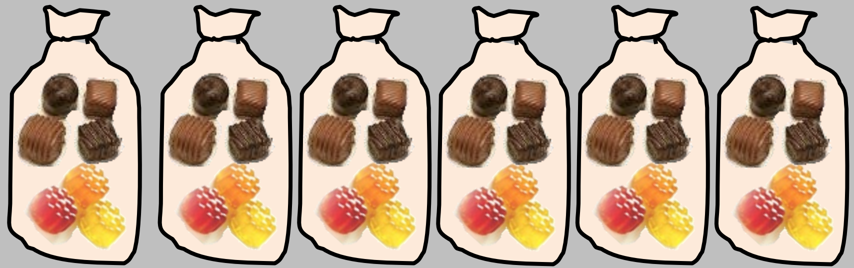
Alessandro scrive: 7×6.

Lea scrive: 42.

Miriam osserva: «Quello che ho scritto è più trasparente, le frasi di Alessandro di Lea sono opache. Opaco significa che non è chiaro, trasparente significa che è chiaro, che si capisce».

Cosa potete dire della frase di Miriam?

Esempio 2A (9 anni)



Miriam rappresenta il numero di dolci: (3+4)×6.
Alessandro scrive: 7×6.
Lea scrive: 42.
Miriam osserva: «Quello che ho scritto è più trasparente, le frasi di Alessandro di Lea sono opache. Opaco significa che non è chiaro, trasparente significa che è chiaro, che si capisce».

Miriam riflette su come la **rappresentazione** **non canonica** di un numero aiuti a interpretare e illustrare la **struttura** di una situazione problematica.

Esempi 2A (9 anni) – COMPORTAMENTO CONSUETO

Tradizionalmente, nella scuola primaria italiana, gli studenti si abituano a vedere i numeri come termini di un'operazione o come risultati.

Questo porta, tra l'altro, a vedere la soluzione di un problema come ricerca di operazioni da effettuare. Il punto di vista prevalente è di natura procedurale: i numeri sono entità che devono essere manipolati.

Gli studenti non sono guidati verso la riflessione, attraverso l'analisi della rappresentazione del numero, sulla sua struttura.

Gli insegnanti raramente spiegano che...

Esempio 2A (9 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

... ogni numero può essere rappresentato in diversi modi, attraverso una qualsiasi espressione equivalente ad esso: uno (ad esempio 12) è il suo nome, la cosiddetta forma **canonica**, tutti gli altri modi di nominarlo (3×4, (2+2)×3, 36/3, 10+2, 3×2×2, ...) sono forme **non canoniche**, e ognuna di loro riceverà un senso senso in relazione al contesto e al **processo** sottostante. Come Miriam osserva, la forma canonica, che rappresenta un **prodotto**, è **opaca** in termini di significati. La forma non canonica rappresenta un processo ed è **trasparente** in termini di significati.

Esempio 2A (9 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Saper riconoscere e interpretare queste forme crea negli alunni la base semantica per accettare e comprendere, negli anni successivi, scritture algebriche come a-4p, ab, x2y, k / 3.
Il complesso processo che accompagna la costruzione di queste competenze dovrebbe essere sviluppato nel corso dei primi anni di scuola.
Il concetto di forma canonica / non-canonica comporta per gli alunni (e per i docenti) implicazioni essenziali per riflettere sui possibili significati attribuiti al segno di uguaglianza.
Vediamo un esempio di queste abilità:

Esempio 2B (11 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Gli alunni hanno il compito di rappresentare in linguaggio matematico la frase: "Raddoppia la somma fra 5 e il numero successivo.“
Quando le proposte vengono visualizzate alla lavagna Diana indica la frase di Filippo e giustifica la sua scrittura: "Filippo ha scritto $2\times(5+6)$ ed è giusto. Ma io ho scritto $2\times(5+5+1)$ perché in questo modo è evidente che il numero successivo a 5 è una unità più grande. La mia frase è più trasparente".

Cosa possiamo dire della frase di Diana?

Esempio 2B (11 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Gli alunni hanno il compito di rappresentare in linguaggio matematico la frase: "Raddoppia la somma fra 5 e il numero successivo.“
Quando le proposte vengono visualizzate alla lavagna Diana indica la frase di Filippo e giustifica la sua scrittura: "Filippo ha scritto $2\times(5+6)$ ed è giusto. Ma io ho scritto $2\times(5+5+1)$ perché in questo modo è evidente che il numero successivo a 5 è una unità più grande. La mia frase è più trasparente".

Diana esalta gli **aspetti *relazionali*** *del numero resi evidenti dalla sua forma* ***non-canonica***.

Esempio 3A (10 anni)

Il compito per gli alunni è:
'*Traducete la frase 3×b×h in linguaggio naturale*'.
Lorenzo legge quello che ha scritto: "Moltiplico 3 per un numero sconosciuto e poi lo moltiplico per un altro numero sconosciuto".
Rita propone: "Il triplo del prodotto di due numeri che non conosci".
Lorenzo osserva: "Rita ha spiegato cos'è 3×b×h, mentre io ho detto quello che si fa".

Cosa possiamo dire della frase di Lorenzo?

Esempio 3A (10 anni)

Il compito per gli alunni è:
'Traducete la frase 3×b×h in linguaggio naturale'.
Lorenzo legge quello che ha scritto: "Moltiplico 3 per un numero sconosciuto e poi lo moltiplico per un altro numero sconosciuto".
Rita propone: "Il triplo del prodotto di due numeri che non conosci".
Lorenzo osserva: "Rita ha spiegato cos'è 3×b×h, mentre io ho detto quello che si fa".

Lorenzo si muove all'interno della dicotomia ***processo-prodotto***.

Un altro esempio:

Esempio 3B (due insegnanti)

Rosa e Viviana sono due insegnanti di uno dei nostri gruppi. Stanno discutendo su un problema che riguarda l'approccio alle equazioni utilizzando la bilancia a piatti: "Ci sono 2 pacchi di sale nel piatto di sinistra e 800 grammi nel piatto a destra". Rosa presenta la sua consegna: "Quanto pesa il sale?" Viviana osserva: "Sarebbe meglio scrivere: Rappresenta la situazione in linguaggio matematico in modo da trovare il peso di un pacchetto di sale".

Commentate le consegne di Rosa e di Viviana.

Esempio 3B (due insegnanti)

Rosa e Viviana sono due insegnanti di uno dei nostri gruppi. Stanno discutendo su un problema che riguarda l'approccio alle equazioni utilizzando la bilancia a piatti: "Ci sono 2 pacchi di sale nel piatto di sinistra e 800 grammi nel piatto a destra". Rosa presenta la sua consegna: "Quanto pesa il sale?" Viviana osserva: "Sarebbe meglio scrivere: Rappresenta la situazione in linguaggio matematico in modo da trovare il peso di un pacchetto di sale".

Rosa e Viviana stanno riflettendo sulla dialettica **rappresentare/risolvere**.

Esempi 3A-3B – COMPORTAMENTO CONSUETO

La consegna di Rosa si colloca in una 'classica' prospettiva aritmetica: Rosa cerca la soluzione e sottolinea la ricerca del prodotto.
In questo modo, gli allievi apprendono che la soluzione di un problema coincide con l'individuazione del suo risultato e con la ricerca di operazioni.
La conseguenza di questo atteggiamento è che le informazioni del problema sono viste come entità ontologicamente diverse e separate in due distinte categorie: <u>i dati</u> e <u>quello che si deve trovare</u>. Gli studenti risolvono il problema agendo sui primi e trovando quest'ultimo.

Esempi 3A-3b - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

La consegna di Viviana si colloca in una prospettiva algebrica: induce uno spostamento dell'attenzione dagli elementi in gioco verso la rappresentazione delle loro relazioni che li collegano e verso il processo. Viviana guida gli alunni dal livello cognitivo verso quella meta-cognitivo al quale il risolutore interpreta la struttura del problema e lo rappresenta attraverso il linguaggio matematico.

Esempi 3A-3b - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Questa differenza tra l'atteggiamento che favorisce il risolvere (Rosa) e quella che favorisce il rappresentare (Viviana) si collega ad uno degli aspetti più importanti del divario epistemologico tra aritmetica e algebra: mentre l'aritmetica implica la ricerca della soluzione, l'algebra la pospone e inizia con una trasposizione formale della situazione problematica dal dominio del linguaggio naturale ad uno specifico sistema di rappresentazione.

Esempio 4 (12 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Thomas ha rappresentato la relazione tra due variabili in questo modo: $a=b+1\times 4$ e spiega: "Il numero delle arance (a) è quattro volte il numero delle mele (b) più 1".
Katia risponde: "Non è giusto: la tua frase significherebbe che il numero delle arance (a) è il numero di mele (b) più 4 (1×4 è 4). Devi mettere le parentesi: $a=(b+1)\times 4$".

Riflettete sulle frasi di Thomas e Katia.

Esempio 4 (12 anni) - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Thomas ha rappresentato la relazione tra due variabili in questo modo: $a=b+1\times4$ e spiega:
"Il numero delle arance (a) è quattro volte il numero delle mele (b) più 1".
Katia risponde: "Non è giusto: la tua frase significherebbe che il numero delle arance (a) è il numero di mele (b) più 4 (1×4 è 4). Devi mettere le parentesi: $a=(b+1)\times4$".

Thomas e Katia stanno discutendo la **traduzione** tra linguaggio naturale e algebrico e gli aspetti **semantici** e **sintattici** delle scritture matematiche.

Esempio 4 (12 anni) – COMPORTAMENTO CONSUETO

Frasi in linguaggio matematico come, ad esempio, $a=(b+1)\times 4$, sono generalmente viste da un punto di vista operativo piuttosto che uno interpretativo.
Studenti non abituati a riflettere sui significati delle frasi scritte in linguaggio algebrico in questo caso semplicemente osservano che "$a=b+1\times 4$ è sbagliato perché non ci sono parentesi".

Esempio 4 - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Tradurre dal linguaggio naturale a quello matematico (e viceversa) favorisce la riflessione sul linguaggio matematico, il che significa **interpretare** e **rappresentare** una situazione problematica per mezzo di un linguaggio formalizzato o, al contrario, riconoscere la situazione problematica che essa descrive attraverso una scrittura simbolica.

→

Esempio 4 - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Strettamente correlata all'atto di rappresentare è la questione del rispetto delle regole nell'uso di un linguaggio (naturale o formalizzato).
Nell'insegnamento della matematica le regole sono generalmente 'consegnate' agli alunni, perdendo così il loro valore sociale di supporto alla comprensione e alla condivisione di un linguaggio come strumento di comunicazione.

Esempio 4 - UNA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Gli alunni dovrebbero essere guidati a capire che stanno acquisendo un nuovo linguaggio, che possiede una sintassi e una semantica. Essi interiorizzano dalla nascita che il rispetto delle regole consente la comunicazione, ma è altamente improbabile che trasferiranno questa peculiarità al linguaggio matematico. Per superare questo ostacolo, chiediamo agli studenti di scambiare messaggi in linguaggio aritmetico-algebrico con Brioshi, un allievo giapponese fittizio che parla solo nella sua lingua madre. Questo trucco funziona come un potente mediatore didattico per sottolineare l'importanza del rispetto delle regole durante l'utilizzo del linguaggio matematico.

Questioni aperte

- Quando e come si comincia ad aprire il sipario sull’algebra?
- Quali atteggiamenti degli insegnanti possono favorire il pensiero pre-algebrico?
- Siete d'accordo con l'idea che l'algebra non segue l'aritmetica, ma piuttosto si sviluppa intersecandosi con essa fin dai primi anni della scuola primaria?
- Quale educazione matematica dovrebbero ricevere i futuri insegnant, al fine di migliorare la loro sensibilità verso quelle micro-situazioni che permettono di 'vedere l'algebra all'interno dell'aritmetica'?

Questioni aperte

- Qual è la vostra posizione su questi argomenti?
- Che tipo di difficoltà (culturali, politiche, sociali) vedete in merito alla diffusione di questo tipo di insegnamento nelle classi? Quali i vincoli?
- Qual è lo stato dell'early algebra nel vostro paese?
- Quali sono le credenze dominanti degli insegnanti sull'algebra e sull'early algebra nel vostro paese?
- Quale importanza hanno queste questioni nella formazione matematica pre-servizio degli insegnanti?

Grazie